자연계열
2013학년도 수시2차 논술고사 기출문제

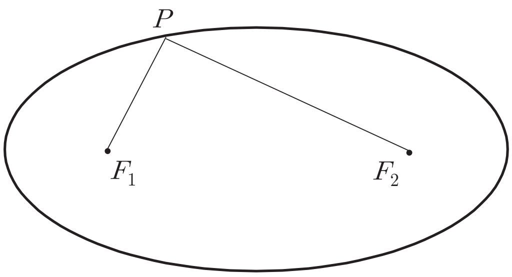
문제 1 (50점)

이차곡선

(가) 타원과 포물선은 이차곡선이다. 좌표평면에서 이 곡선들을 나타내는 방정식은 x, y에 관한 이차방정식이 된다. 원뿔을 다양한 각도의 평면으로 잘랐을 때에도 이 곡선들이 나타난다. 이차곡선에는 이 외에도 쌍곡선이 있다.

타원과 포물선의 기하학적인 정의는 다음과 같다.

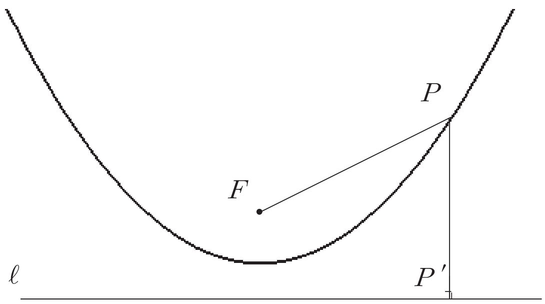
타원: 두 정점으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 타원이라 하고, 두 정점을 이 타원의 초점이라 한다.



$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} =$ 일정

F_1, F_2 : 초점

포물선: 한 정점과 한 정직선으로부터 같은 거리에 있는 점들의 집합을 포물선이라 하고, 정점과 정직선을 각각 포물선의 초점과 준선이라 한다.

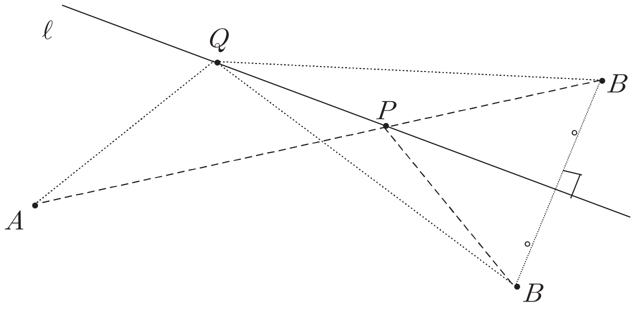


$\overline{FP} = \overline{PP'}$

F : 초점, ℓ : 준선

이차곡선과 한 점에서 만나는 직선을 이 이차곡선의 접선이라고 한다. (단, 포물선의 경우에는 준선에 수직인 직선은 제외한다.) 이차곡선 위의 각 점마다 이 점을 지나는 유일한 접선이 존재한다.

(나) 한 직선이 있고, 그 직선에 대해 같은 쪽에 두 개의 점이 있다. 그 중 한 점으로부터 직선 위의 점을 거쳐 다른 점까지에 이르는 최단경로에 대해 생각해 보자. 이 최단경로를 구하는 방법은 다음과 같다.

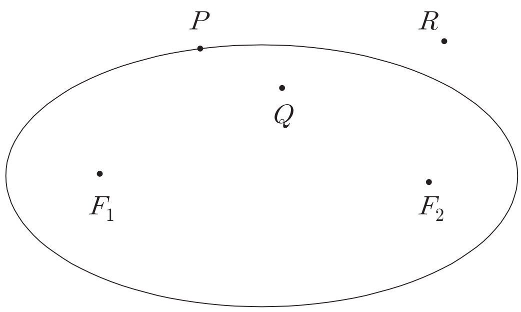


직선 ℓ과 이 직선에 대해 같은 쪽에 있는 두 점 A, B가 주어져 있다. 직선 ℓ에 대해 점 B와 대칭인 점을 B'이라 하고, 선분 AB'이 직선 ℓ과 만나는 점을 P라 하자. 그러면, A에서 P를 거쳐 B까지 가는 것이 구하는 최단경로가 된다. 이를 증명하기 위해 직선 ℓ 위의 임의의 점을 Q라 하면

$$\overline{AQ}+\overline{QB}=\overline{AQ}+\overline{QB'}>\overline{AB'}=\overline{AP}+\overline{PB'}=\overline{AP}+\overline{PB}$$

이다. 따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$가 최단경로가 된다. 이때, 직선 ℓ에 대해 선분 AP가 이루는 각과 선분 BP가 이루는 각이 같아지는데, 그 이유는 직선 ℓ에 대해 선분 AP와 선분 $B'P$가 이루는 각이 맞꼭지각으로 같고, 직선 ℓ에 대해 선분 BP와 선분 $B'P$가 이루는 각이 대칭에 의해 같기 때문이다.

[문제 1-1] (10점) 그림과 같이 초점이 F_1, F_2인 타원이 있다. 이 타원에 대해 세 점 P, Q, R이 각각 타원 위, 내부, 그리고 외부에 위치하고 있다.

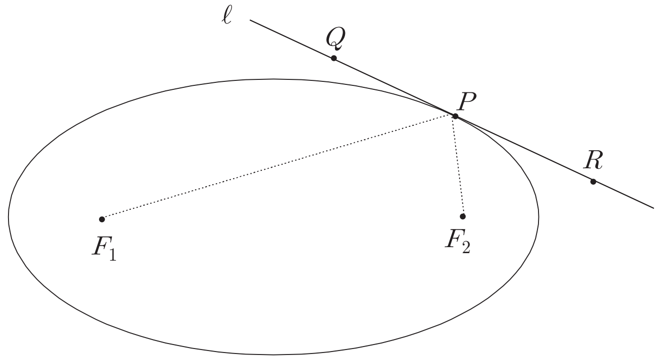


이때,

$$\overline{F_1Q}+\overline{QF_2}<\overline{F_1P}+\overline{PF_2}<\overline{F_1R}+\overline{RF_2}$$

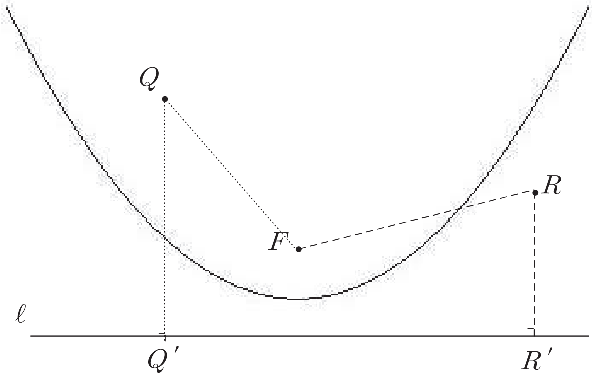
임을 보여라.

[문제 1-2] (10점) 그림과 같이 초점이 F_1, F_2인 타원 위의 한 점 P에서의 접선 ℓ이 있다.



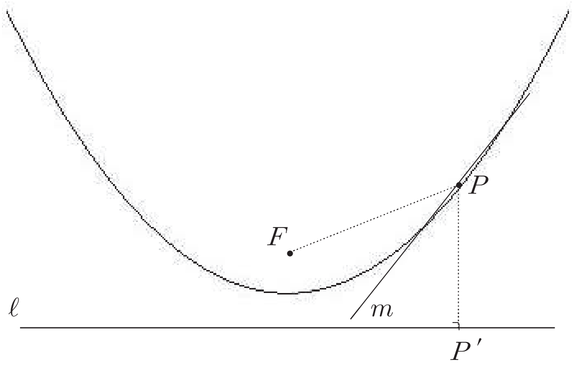
직선 ℓ 위에 두 점 Q, R이 P에 대하여 서로 반대편에 위치하고 있다. [문제 1-1]과 제시문을 이용하여 $\angle F_1PQ = \angle F_2PR$임을 보여라.

[문제 1-3] (10점) 그림과 같이 초점과 준선이 각각 F, ℓ인 포물선이 있다. 이 포물선에 대해 두 점 Q, R이 각각 포물선의 안과 바깥에 위치하고 있다.



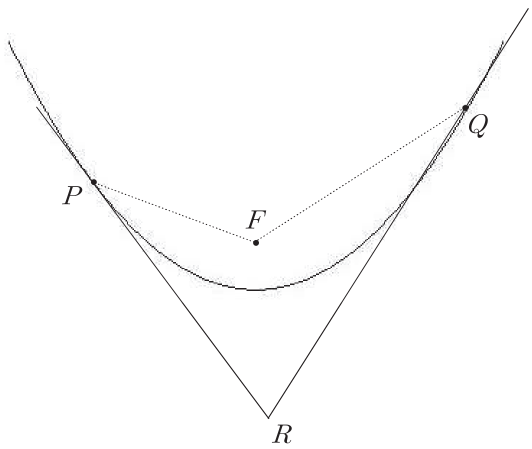
Q'과 R'이 각각 Q와 R에서 직선 ℓ에 내린 수선의 발일 때, $\overline{FQ} < \overline{QQ'}$이고 $\overline{FR} > \overline{RR'}$임을 보여라.

[문제 1-4] (10점) 그림과 같이 초점과 준선이 각각 F, ℓ인 포물선이 있다.



포물선 위의 한 점 P에서 그은 접선이 m이고, P에서 ℓ에 내린 수선의 발을 P'이라 할 때, 접선 m은 $\angle FPP'$을 이등분함을 보여라.

[문제 1-5] (10점) 그림과 같이 초점이 F인 포물선 위의 두 점 P, Q에서 각각 그은 접선이 점 R에서 만난다.



$\angle PFQ = 105^\circ$일 때 $\angle PRQ$의 크기를 구하라.

문제 2 (50점)

(가) 수열 $\{a_n\}$에서 이웃하는 두 항의 차

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

으로 이루어진 수열 $\{b_n\}$을 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이라고 한다. 계차수열을 이용하여 수열의 일반항을 구할 수 있다. 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면, 정의로부터

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 - a_1 \\ b_2 &= a_3 - a_2 \\ b_3 &= a_4 - a_3 \\ &\vdots \\ b_{n-1} &= a_n - a_{n-1} \end{aligned}$$

이므로 위의 $(n-1)$개의 등식을 더하면 $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} = a_n - a_1$ 이다. 따라서 다음 식을 얻는다.

$$\boxed{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (\text{단, } n \geq 2)}$$

(나) 중세 이탈리아의 수학자 피보나치는 그의 저서에서 (생물학적으로 비현실적이지만) 이상적인 토끼의 개체 수 변화를 생각하였다. 한 쌍의 새끼 토끼가 한 달이 되면 성숙하여 다음

달부터 매월 한 쌍의 새끼를 낳는다. 또, 새로 태어난 한 쌍의 토끼도 한 달이 지나면 성숙하여 그 다음 달부터 매월 한 쌍의 새끼를 낳는다. 이와 같은 식으로 계속해 갈 때, 제 n월 전체 토끼의 쌍의 수를 f_n이라 하자. 제 $(n+2)$월 성숙한 토끼의 쌍의 수는 제 $(n+1)$월 전체 토끼의 쌍의 수와 같고, 새끼 토끼 쌍의 수는 제 n월 전체 토끼의 쌍의 수와 같으므로 수열 $\{f_n\}$은 아래 식들을 만족하게 된다.

(ㄱ) $f_1 = 1,\ f_2 = 1$

(ㄴ) $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (n \geq 1)$

이와 같이 정의된 수열 $\{f_n\}$을 피보나치(Fibonacci) 수열이라 한다.

(다) 피보나치 수열의 일반항은 간단히 표현할 수 있다. 이 공식은 드 므와브르(De Moivre)에 의하여 처음으로 발견되었지만 비네(Binet)의 공식으로 더 잘 알려져 있다. 점화식으로부터 비네의 공식을 얻는 과정을 알아보자. 우선 점화식 (ㄴ)을

$$f_{n+2} - \alpha f_{n+1} = \beta(f_{n+1} - \alpha f_n)$$

으로 바꾸어 적는다. 이렇게 변형하기 위해서는 $\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = -1$을 만족하는 두 수 $\alpha,\ \beta$를 구해야 한다. 즉, $\alpha,\ \beta$는 t에 관한 이차방정식 $t^2 - t - 1 = 0$의 두 근이다. 따라서 수열 $\{f_{n+1} - \alpha f_n\}$ 은 첫째항이 $f_2 - \alpha f_1 = 1 - \alpha = \beta$ 이고 공비가 β인 등비수열이므로 $f_{n+1} - \alpha f_n = \beta^n \quad (n \geq 1)$을 얻는다. 이 식의 양변을 α^{n+1}로 나누면 $\dfrac{f_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \dfrac{f_n}{\alpha^n} = \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n$이므로 수열 $\left\{\dfrac{f_n}{\alpha^n}\right\}$의 계차수열을 얻는다. 계차수열로부터 원래 수열의 일반항을 구하는 공식을 적용하면 $n \geq 2$에 대한 아래 식을 얻는다.

$$\frac{f_n}{\alpha^n} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k = \frac{1}{\alpha} + \frac{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\frac{\beta}{\alpha} - 1}\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1} - 1\right) = \frac{1}{\beta - \alpha}\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n - 1\right)$$

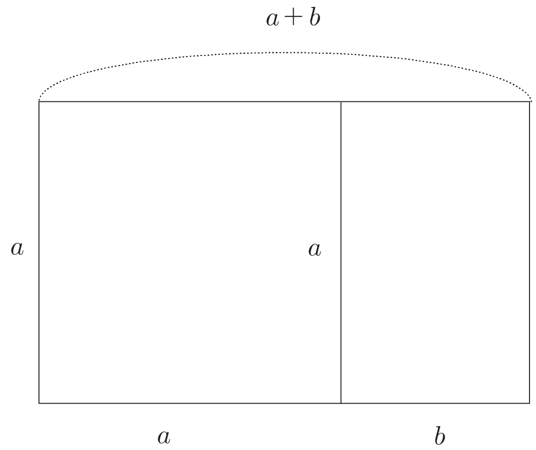
이제 이 식의 양변에 α^n을 곱하여 피보나치 수열의 일반항에 관한 비네의 공식을 얻게 된다.

$$f_n = \frac{1}{\beta - \alpha}(\beta^n - \alpha^n)$$

비네의 공식은 피보나치 수열과 관련된 여러 식을 증명할 때 유용하다. 예를 들어, 비네의 공식으로부터 다음 극한 공식을 쉽게 확인할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(라) 두 양수 a, b (단, $a > b$)가 황금비(golden ratio)를 이룬다는 것은 큰 수에 대한 두 수의 합의 비가 작은 수에 대한 큰 수의 비와 같을 때이다. 아래 그림은 이와 같은 관계를 잘 나타낸다.



이를 수식으로 표현하면 $(a+b):a=a:b$, 즉 $\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{a}{b}$가 성립한다. 이때 $\dfrac{a}{b}$를 황금비라고 한다. 황금삼각형(golden triangle)이라 부르는 특별한 형태의 이등변삼각형이 있다. 이 이등변삼각형은, 한 밑각의 이등분선이 만드는 두 작은 삼각형 중 하나와 닮은꼴이다. 황금삼각형은 황금비와 깊은 관련이 있다.

[문제 2-1] (10점) $a_1 = 1$, $(2^n + 3^n)a_n a_{n+1} = a_n - a_{n+1}$ $(n \geq 1)$로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n}$을 구하라.

[문제 2-2] (10점) 피보나치 수열 $\{f_n\}$에 대하여, 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n f_{n+2}}$ 의 합을 구하라.

[문제 2-3] (10점) 2 이상의 모든 짝수 k에 대하여 아래 식이 성립함을 보여라.

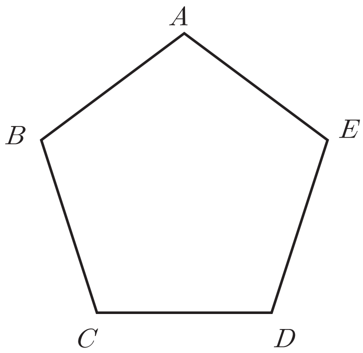
$$\boxed{f_{k-1}f_{2k} - f_k = f_k f_{2k-1}}$$

[문제 2-4] (10점) 제시문의 내용을 바탕으로 다음 질문에 답하라.

1) 황금비가 만족하는 정수 계수의 이차방정식을 유도하라.

2) 문항 1)에서 구한 방정식을 이용하여 황금비와 황금비의 역수는 소수점 이하의 값이 일치함을 보여라.

[문제 2-5] (10점) 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정오각형 $ABCDE$가 있다.



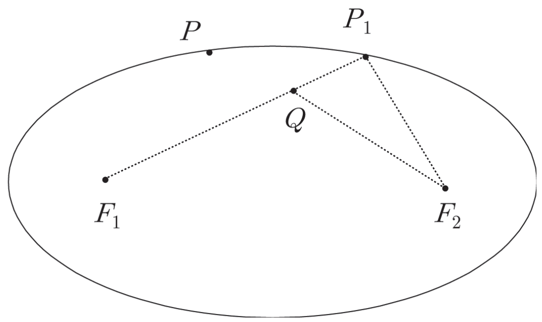
1) 세 꼭짓점으로 이루어진 삼각형 ACD가 황금삼각형임을 보여라.

2) 선분 $\overline{AC}$의 길이를 구하라.

자연계열
2013학년도 수시2차 논술고사 예시답안

[문제 1-1]

1) 선분 F_1Q를 Q쪽으로 연장하여 타원과 만나는 점을 P_1이라 하면



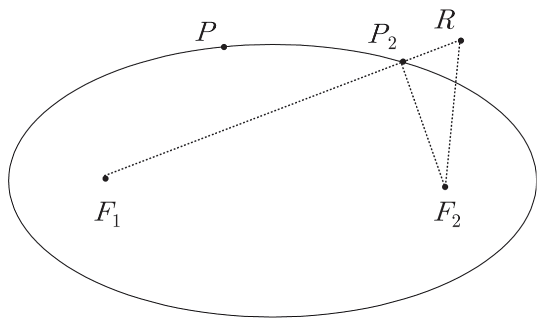
$\triangle P_1QF_2$에서 $\overline{QF_2} < \overline{QP_1} + \overline{P_1F_2}$이므로,

$\overline{F_1Q} + \overline{QF_2} < \overline{F_1Q} + \overline{QP_1} + \overline{P_1F_2} = \overline{F_1P_1} + \overline{P_1F_2}$

그런데, P_1과 P가 타원 위에 있으므로 $\overline{F_1P_1} + \overline{P_1F_2} = \overline{F_1P} + \overline{PF_2}$이다.

따라서, $\overline{F_1Q} + \overline{QF_2} < \overline{F_1P} + \overline{PF_2}$

2) 선분 F_1R이 타원과 만나는 점을 P_2라 하면



$\triangle P_2F_2R$에서 $\overline{P_2F_2} < \overline{P_2R} + \overline{RF_2}$이므로,

$\overline{F_1P_2} + \overline{P_2F_2} < \overline{F_1P_2} + \overline{P_2R} + \overline{RF_2} = \overline{F_1R} + \overline{RF_2}$

그런데, P_2과 P가 타원 위에 있으므로 $\overline{F_1P} + \overline{PF_2} = \overline{F_1P_2} + \overline{P_2F_2}$이다.

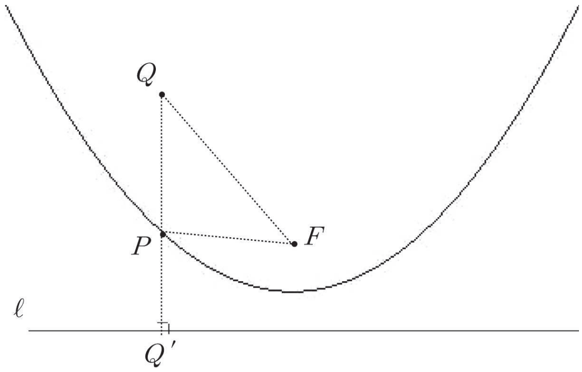
따라서, $\overline{F_1P} + \overline{PF_2} < \overline{F_1R} + \overline{RF_2}$

[문제 1-2]

접선 ℓ 위에서 P와 다른 임의의 점 X를 잡자. X는 타원 밖에 위치하므로, [문제 1-1]에 의해 $\overline{F_1P}+\overline{PF_2}<\overline{F_1X}+\overline{XF_2}$가 된다. 이것은 F_1에서 ℓ 위의 한 점을 거쳐 F_2에 이르는 최단경로가 $\overline{F_1P}+\overline{PF_2}$임을 뜻한다. 따라서 제시문 (나)에 의해 $\angle F_1PQ=\angle F_2PR$이다.

[문제 1-3]

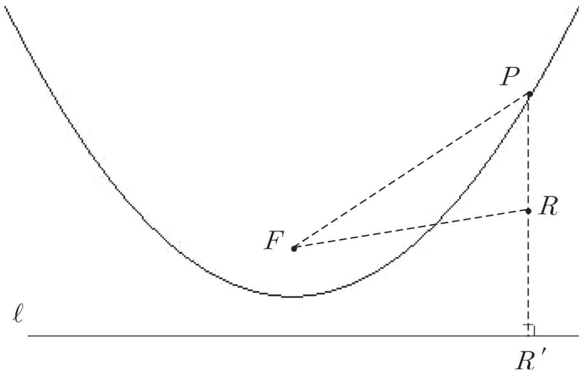
1) 선분 QQ'이 포물선과 만나는 점을 P라 하면



$\triangle PQR$에서 $\overline{FQ}<\overline{QP}+\overline{PF}$이다. 그런데 P가 포물선 위에 있으므로 $\overline{PF}=\overline{PQ'}$이다.

따라서 $\overline{FQ}<\overline{QP}+\overline{PQ'}=\overline{QQ'}$

2) 직선 RR'이 포물선과 만나는 점을 P라 하면



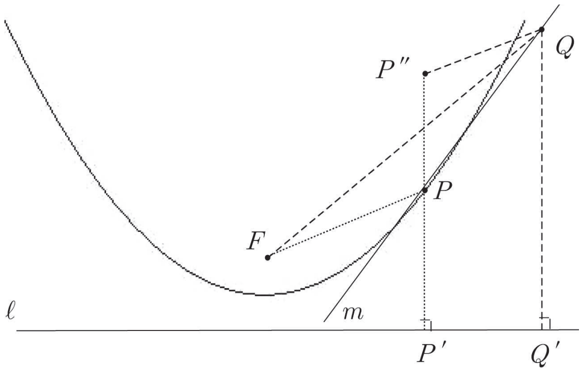
$\triangle FRP$에서 $\overline{FR}<\overline{FP}-\overline{PR}$이다. 그런데 P가 포물선 위에 있으므로 $\overline{FP}=\overline{PR'}$이다.

따라서 $\overline{FR}>\overline{PR'}-\overline{PR}=\overline{RR'}$

[문제 1-4]

선분 PP'을 P 쪽으로 연장하여 한 점 P''을 잡자. 제시문 (나)를 이용하기 위해 접선 m 위에 P와 다른 임의의 한 점 Q를 잡고 Q에서 ℓ에 내린 수선의 발을 Q'이라 하고, $\overline{FR}+\overline{PP''}<\overline{FQ}=\overline{QP''}$임을 보이자.

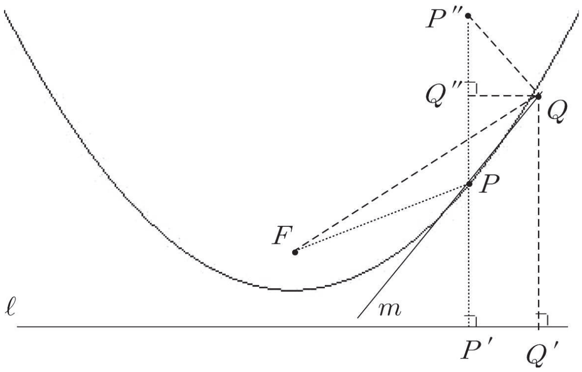
① $\overline{QQ'} \geq \overline{P''P'}$일 때:



Q가 포물선 밖에 있으므로 [문제 1-3]에 의해 $\overline{FQ}>\overline{QQ'}$. 그러므로

$$\overline{FP}+\overline{PP''}=\overline{PP'}+\overline{PP''}=P''P' \leq \overline{QQ'}<\overline{FQ}<\overline{FQ}+\overline{QP''}$$

② $\overline{QQ'}<\overline{P''P'}$일 때: Q에서 선분 $P''P'$에 낼ㄴ 수선의 발을 Q''이라 하면,



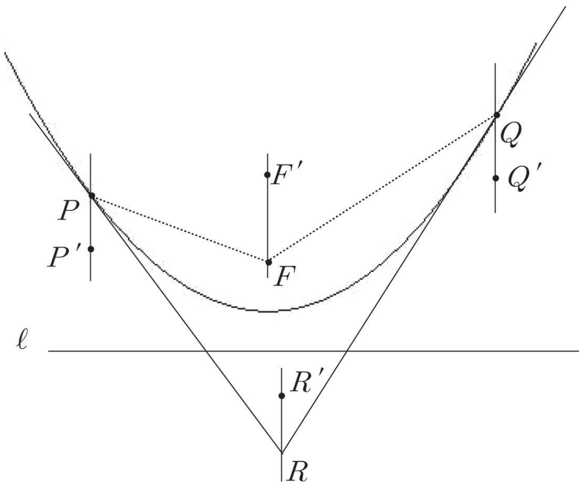
직각삼각형 $P''Q''Q$에서 $\overline{P''Q''}<\overline{QP''}$이고 Q가 포물선 밖에 있으므로 [문제 1-3]에 의해 $\overline{FQ}>\overline{QQ'}$이므로

$$\overline{FP}+\overline{PP''}=\overline{PP'}+\overline{PP''}=\overline{P''P'}=\overline{P''Q''}+\overline{Q''P'}<\overline{QP''}+\overline{QQ'}<\overline{QP''}+\overline{FQ}$$

따라서 $\overline{FP}+\overline{PP''}$는 F에서 m을 거쳐 P''에 이르는 최단거리이므로, 제시문 (나)에 의해 m에 대해 선분 FP와 선분 $P''P$가 이루는 각이 같다. 그런데 m에 대해 선분 $P''P$와 선분 PP'이 이루는 각이 맞꼭지각으로 같으므로, m은 $\angle FPP'$을 이등분한다.

[문제 1-5]

점 F, P, Q, R을 지나고 준선에 수직인 직선들 위에서 그림과 같이 F', P', Q', R'을 잡자.



그러면 $\angle FPP' = \angle PFF'$, $\angle FQQ' = \angle QFF'$이고, $\angle PRR' = \angle P'PR$, $\angle QRR' = \angle Q'QR$

이다. 그런데 $\angle P'PR = \dfrac{1}{2}\angle FPP'$, $\angle Q'QR = \dfrac{1}{2}\angle FQQ'$이므로

$$\begin{aligned}\angle PRQ &= \angle PRR' + \angle QRR' = \angle P'PR + \angle Q'QR \\ &= \frac{1}{2}(\angle FPP' + \angle FQQ') = \frac{1}{2}(\angle PFF' + \angle QFF') \\ &= \frac{1}{2}\angle PFQ = 52.5^\circ\end{aligned}$$

[문제 2-1]

점화식으로부터 일반항은 0이 될 수 없음을 알 수 있다. 점화식의 양변을 $a_n a_{n+1}$으로 나누면

$\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 2^n + 3^n$을 얻는다. 즉, 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$의 계차수열의 일반항을 얻는다.

제시문 (가)에 따라 $n \geq 2$에 대하여

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1}(2^k + 3^k) = 1 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} + \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} = 2^n + \frac{3^n}{2} - \frac{5}{2}$$

즉 $a_n = \dfrac{2}{2^{n+1} + 3^n - 5}$ 를 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2}{2^{n+3}+3^{n+2}-5}}{\dfrac{2}{2^{n+1}+3^n-5}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^n-5}{2^{n+3}+3^{n+2}-5} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1 - \left(\dfrac{5}{3^n}\right)}{8\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 9 - \left(\dfrac{5}{3^n}\right)} = \frac{1}{9}$$

[문제 2-2]

피보나치 수열의 점화식으로부터 $\dfrac{f_{n+1}}{f_n f_{n+2}} = \dfrac{f_{n+2} - f_n}{f_n f_{n+2}} = \dfrac{1}{f_n} - \dfrac{1}{f_{n+2}}$ 을 얻는다.

이로부터 주어진 무한급수의 부분합에 대한 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f_{k+1}}{f_k f_{k+2}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{f_k} - \frac{1}{f_{k+2}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_3} \right) + \left(\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{f_{n-1}} - \frac{1}{f_{n+1}} \right) + \left(\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f_{n+2}} \right) \\ &= \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_{n+1}} - \frac{1}{f_{n+2}} = 2 - \frac{1}{f_{n+1}} - \frac{1}{f_{n+2}} \end{aligned}$$

점화식으로부터 $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} f_n = \infty$ 이고 무한급수의 합은 부분합의 극한이므로 $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} S_n = 2$이다.

[문제 2-3]

문제 식의 좌변을 L, 우변을 R이라 하자. 제시문 (다) 비네의 공식을 이용하여 정리하면

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 L &= \left(\beta^{k-1} - \alpha^{k-1}\right)\left(\beta^{2k} - \alpha^{2k}\right) - (\beta - \alpha)\left(\beta^k - \alpha^k\right) \\ &= \beta^{3k-1} + \alpha^{3k-1} - \alpha^{k-1}\beta^{k-1}\left(\beta^{k+1} + \alpha^{k+1}\right) - \beta^{k+1} - \alpha^{k+1} + \alpha\beta\left(\beta^{k-1} + \alpha^{k-1}\right) \end{aligned}$$

그리고

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 R &= \left(\beta^k - \alpha^k\right)\left(\beta^{2k-1} - \alpha^{2k-1}\right) \\ &= \beta^{3k-1} + \alpha^{3k-1} - \alpha^k\beta^k\left(\beta^{k-1} + \alpha^{k-1}\right) \end{aligned}$$

한편, 이차방정식의 근과 계수와의 관계로부터 $\alpha\beta = -1$, 그리고 k는 짝수이므로

$\alpha^{k-1}\beta^{k-1} = -1$, $\alpha^k\beta^k = 1$이 각각 성립한다.

이를 이용하여 정리하면, 아래 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 L &= \beta^{3k-1} + \alpha^{3k-1} + \left(\beta^{k+1} + \alpha^{k+1}\right) - \left(\beta^{k+1} + \alpha^{k+1}\right) - \left(\beta^{k-1} + \alpha^{k-1}\right) \\ &= \beta^{3k-1} + \alpha^{3k-1} - \left(\beta^{k-1} + \alpha^{k-1}\right) \end{aligned}$$

$$(\beta - \alpha)^2 R = \beta^{3k-1} + \alpha^{3k-1} - \left(\beta^{k-1} + \alpha^{k-1}\right)$$

두 식으로부터 $L = R$을 얻는다.

[문제 2-4]

1) 제시문 (라)에 의하면 황금비는 양수 a, b가 식 $\dfrac{(a+b)}{a} = \dfrac{a}{b}$를 만족할 때 $\dfrac{a}{b}$의 값이다.

$(a+b)b = a^2$에서 양변을 b^2으로 나누면 $\dfrac{a}{b} + 1 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2$을 얻게 되어 황금비는

이차 방정식 $t^2 - t - 1 = 0$의 근임을 알 수 있다.

2) 이제 황금비를 φ라 하면, $\varphi^2-\varphi-1=0$이 성립한다.

이 식의 양변을 φ로 나누면 $\varphi-\frac{1}{\varphi}=1$을 얻게 된다. 즉, 황금비와 황금비의 역수의 차는 1이다.

따라서 황금비와 황금비의 역수의 소수점 이라 값은 일치한다.

[문제 2-5]

1) 정오각형의 한 각의 크기는 $180^{\circ}\cdot(5-2)/5=108^{\circ}$이다.

$\triangle ABC$는 이등변삼각형이므로 $\angle CAB=\angle BCA=(180^{\circ}-108^{\circ})/2=36^{\circ}$.

이로부터 $\angle ACD=108^{\circ}-36^{\circ}=72^{\circ}$를 얻는다. 마찬가지로 $\angle ACD=72^{\circ}$이다.

$\angle ACD$의 이등분선이 선분 AD와 만나는 점을 P라 하자. $\angle PCD$의 크기는 $72^{\circ}/2=36^{\circ}$이다.

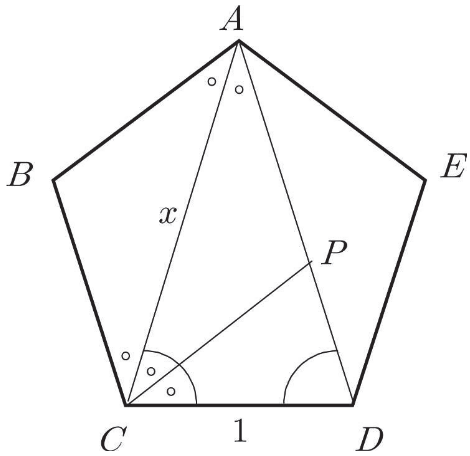
따라서 $\triangle ACD$와 $\triangle CDP$는 닮음이다.

2) 선분 $\overline{AC}$의 길이를 x라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여 $\overline{AP}:\overline{PD}=x:1$을 얻는다.

한편 $\overline{AP}+\overline{PD}=\overline{AD}=x$가 성립하므로 $\overline{PD}=\frac{x}{1+x}$를 얻는다,

닮은 삼각형의 성질로부터 $x:1=1:\frac{x}{1+x}$, 즉 $x^2-x-1=0$이 성립한다.

이 식을 풀면 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$를 얻는다.

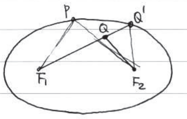


자연계열

2013학년도 수시2차 논술고사 답안 작성 사례

1번 문항 (반드시 해당 문항과 일치하여야 함)

[문제 1-1]



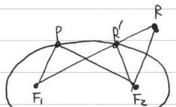
〈그림 1-1〉

우선 직선 F_1Q와 타원의 교점을 Q'라고 하자. Q'는 타원 위의 점이므로 $\overline{F_1P}+\overline{PF_2}=\overline{F_1Q'}+\overline{Q'F_2}$ 이다. —①

~~삼각형~~ QF_2Q'에서, 삼각형의 성질에 따라 $\overline{QF_2}<\overline{QQ'}+\overline{Q'F_2}$ 이다. —②

그러므로 $\overline{F_1Q}+\overline{QF_2}<\overline{F_1Q}+\overline{QQ'}+\overline{Q'F_2}=\overline{F_1Q'}+\overline{Q'F_2}=\overline{F_1P}+\overline{PF_2}$ 이다.

따라서 $\overline{F_1Q}+\overline{QF_2}<\overline{F_1P}+\overline{PF_2}$ 이다 …… (*)



이번에는 직선 $\overline{F_1R}$과 타원의 교점을 R'라고 하자. 마찬가지로 R'는 타원 위의 점이므로 $\overline{F_1R'}+\overline{R'F_2}=\overline{F_1P}+\overline{PF_2}$ 이다.

~~삼각형~~ $R'F_2R$에서 $\overline{R'F_2}<\overline{R'R}+\overline{RF_2}$ 이다.

그러므로 $\overline{F_1P}+\overline{PF_2}=\overline{F_1R'}+\overline{R'F_2}<\overline{F_1R'}+\overline{R'R}+\overline{RF_2}=\overline{F_1R}+\overline{RF_2}$ 이다.

따라서 $\overline{F_1P}+\overline{PF_2}<\overline{F_1R}+\overline{RF_2}$ 이다.

그러므로 $\overline{F_1Q}+\overline{QF_2}<\overline{F_1P}+\overline{PF_2}<\overline{F_1R}+\overline{RF_2}$는 성립한다.

[문제 1-2] 직선 l 위에 점 P가 아닌 임의의 점 X에 대해 생각해보자. 그러면 점 P는 타원 위에 있고, 점 X는 타원의 외부에 존재한다. 그런데 [문제 1-1]에서 타원 외부에 있는 점에 대해 $\overline{F_1P}+\overline{PF_2}<\overline{F_1X}+\overline{XF_2}$가 성립하므로, ~~점 P는~~ 점 F_1에서 직선 l을 거쳐 점 F_2로 가는 최단경로는 점 P를 지나는 경우이다.

이제 점 F_2를 직선 l에 대칭이동한 점을 F_2'라고 하자. 그러면 (나)와 같이 세 점 F_1, P, F_2'는 한 직선 위에 존재하게 된다.

그러므로 $\angle F_1PQ$와 $\angle F_2'PR$은 맞꼭지각으로 같고, $\angle F_2'PR=\angle F_2PR$은 직선 l에 대한 대칭으로 같다.

따라서 $\angle F_1PQ=\angle F_2PR$ 이다.

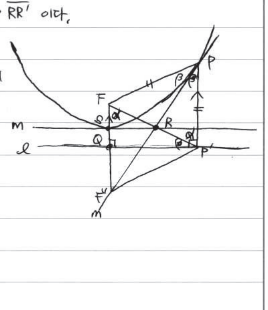
[문제 1-3] 직선 $\overline{QQ'}$와 포물선의 교점을 H_1이라고 하자. 제시문의 포물선의 정의에 따라 $\overline{FH_1}=\overline{H_1Q'}$ 이다.

$\triangle FQH_1$에서 $\overline{FQ}<\overline{QH_1}+\overline{FH_1}=\overline{QH_1}+\overline{H_1Q'}=\overline{QQ'}$ 이다. 따라서 $\overline{FQ}<\overline{QQ'}$ 이다.

직선 $\overline{RR'}$과 포물선의 교점을 H_2라고 하자. 정의에 따라 $\overline{FH_2}=\overline{H_2R'}$ 이다.

$\triangle FRH_2$에서 $\overline{FR}+\overline{RH_2}>\overline{FH_2}=\overline{H_2R'}=\overline{H_2R}+\overline{RR'}$ 이다. 즉, $\overline{FR}+\cancel{\overline{RH_2}}>\cancel{\overline{RH_2}}+\overline{RR'}$ 이다. 따라서 $\overline{FR}>\overline{RR'}$ 이다.

[문제 1-4] 점 F를 지나고 $\overline{PP'}$에 평행한 선분과 접선 m의 교점을 F'라고 하자. 그리고 $\overline{FF'}$와 직선 l의 교점을 Q, $\overline{FP'}$와 접선 m과의 교점을 R이라고 하자. $\overline{FF'}\parallel\overline{PP'}$ 이므로 $\angle QFP'=\angle PP'R$이다. 이 각을 α라고 하자.



직선 l에 평행하고 점 R을 지나는 직선을 m이라고 하고, 그 직선과 $\overline{FF'}$의 교점을 S라고 하자.

점 S는 이 포물선의 꼭짓점이다. 그러면 삼각형 FQP'에서 $\overline{FS}=\overline{SQ}$ 이므로 $\overline{FR}=\overline{RP'}$ 이다. —①

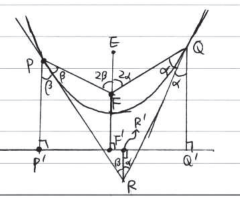
그리고 정의에 의해 $\overline{FP}=\overline{PF'}$ —② 이고, $\overline{PR}$은 공통 —③ 이므로

①.②.③에 의해 $\triangle PRF\equiv\triangle PRP'$ (SSS 합동) 이다.

그러므로 $\angle P'PR=\angle FPR=\beta$ 이다.

따라서 접선 m은 $\angle FPP'$를 이등분한다.

[문제 1-5] 우선 포물선의 준선을 l이라고 하고, 점 P.Q.R.F에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 P'. Q'. R'. F'라고 하자. ~~그리고 ∠~~



그러면 [문제 1-4]에 의해 $\angle P'PR=\angle FPR=\beta$, $\angle FQR=\angle Q'QR=\alpha$ 라고 할 수 있다.

$\overline{F'F}$의 연장선 상의 점을 E라고 하면 $\angle QFE=\angle Q'QF=2\alpha$, $\angle P'PF=\angle EFP=2\beta$ 이다. 이는 $\overline{PP'}\parallel\overline{EF'}\parallel\overline{QQ'}$ 이기 때문이다. 따라서 $\angle PFQ=105°=2(\alpha+\beta)$ 이므로 $\alpha+\beta=52.5°$ 이다 —①.

같은 방법으로 $\overline{PP'}\parallel\overline{RR'}\parallel\overline{QQ'}$ 임을 이용하면 $\angle P'PR=\angle R'RP=\beta$, $\angle Q'QR=\angle R'RQ=\alpha$ 이므로 ①에 의해

$\angle PRQ=\alpha+\beta=52.5°$ 이다.

이 줄 아래는 답안 작성을 하지 말 것